III. Dynamik

III.1 Kraftfelder

$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}$ Newton 2 (3.1)

benötigte Kraftgesetz $\vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = ?$

Strategie: $\vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) \xrightarrow{(3.1)} \vec{r}(t)$ „Mechanik"

Beispiel: $\vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = q\left(\vec{E}(\vec{r}, t) + \dot{\vec{r}} \times \vec{B}(\vec{r}, t)\right)$

Lorentzkraft (3.2)

umgekehrt: $\vec{r}(t) \xrightarrow{\text{Maxwell}} \vec{E}(\vec{r}, t), \vec{B}(\vec{r}, t)$ „E-Dynamik"

Bemerkungen:

- $\vec{F} = 0 \rightsquigarrow \ddot{\vec{r}} = 0 \rightsquigarrow \dot{\vec{r}} = \underset{\vec{v}}{\text{const}} \rightsquigarrow \vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v} \cdot t$

  definiert ein Inertialsystem Newton 1

- m ist ein positiver Skalar, „träge Masse", Eigenschaft des Teilchens
- $\vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$ hängt nicht ab von $\ddot{\vec{r}}, \dddot{\vec{r}}$ etc. / $F(\vec{r}, t)$ „Kraftfeld"

Newton 2 $\doteq$ gekoppeltes System von 3 gewöhnlichen Differenzialgleichungen 2. Ordnung in $\vec{r}(t)$

eindeutige Lösung erfordert Anfangsbedingungen

eine Funktion $\vec{r}(t)$ für $t > t_0$ $\qquad$ $\vec{r}(t_0), \dot{\vec{r}}(t_0)$

Fall 1 freie Fall (auch Würfe)

Gravitations-Kraftgesetz:

$$\frac{\vec{r}-\vec{r}_0}{|\vec{r}-\vec{r}_0|}$$

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\gamma \frac{mM}{(\vec{r}-\vec{r}_0)^2}\,\vec{e}_{\vec{r}-\vec{r}_0} \qquad (3.3)$$

wähle Ursprung auf Erdoberfläche: $\vec{r}_0 = -R\vec{e}_3$

$R \approx 6370$ km

Näherung nahe der Erdoberfläche: $|\vec{r}| \ll R$, $\frac{|\vec{r}|}{R} \ll 1$

$$\vec{F}(\vec{r}) \doteq -\gamma m M \frac{(x, y, z+R)}{[x^2+y^2+(z+R)^2]^{3/2}} \doteq -\gamma \frac{mM}{R^2} \frac{\left(\frac{x}{R}, \frac{y}{R}, \frac{z+R}{R}\right)}{\left[\left(\frac{x}{R}\right)^2+\left(\frac{y}{R}\right)^2+\left(\frac{z+R}{R}\right)^2\right]^{3/2}}$$

$$\approx -\gamma \frac{mM}{R^2} \frac{(0,0,1)}{[0^2+0^2+1^2]^{3/2}} \doteq -mg\,\vec{e}_3 \quad \text{mit} \quad g = \frac{\gamma M}{R^2} \qquad (3.4)$$

m = „schwere Masse"

Wähle AW: Herunterfallen lassen $\begin{cases} \vec{r}(0) \doteq (0,0,h) \\ \dot{\vec{r}}(0) \doteq (0,0,0) \end{cases}$

Newton: $\cancel{m}(\ddot{x},\ddot{y},\ddot{z}) = -\cancel{m}g\,(0,0,1)$

in Komponenten: $\ddot{x}=0,\ \ddot{y}=0,\ \ddot{z}=-g$ $\circledast$

Lösung: $x(t)=0,\ y(t)=0,\ z(t)=?$

Ansatz: z.B. $z(t) = A + B\cdot t + C t^2 + D\cdot t^3 + E\cdot\sin\omega t$

Einsetzen: $\dot{z}(t) = B + 2Ct + 3Dt^2 + E\omega\cos\omega t$

$\ddot{z}(t) = 2C + 6Dt - E\omega^2\sin\omega t$

Vergleich mit $\circledast$: $2C=-g,\ D=0,\ E=0$
(in Abhängigkeit von t)

Vergleich mit AW: $0 = \dot{z}(0) = B,\quad h = z(0) = A$

eindeutige Lösung: $z(t) = h - \frac{1}{2}g t^2$ (3.5)

Fall 2: harmonische Oszillator

Hooke: $\vec{F}(\vec{r}) = -\kappa(\vec{r}-\vec{r}_0)$ (3.6)

Ruhe: $\vec{r} = \vec{r}_0$

wähle $\vec{r}_0 = 0$

Newton: $m(\ddot{x},\ddot{y},\ddot{z}) = -\kappa(x,y,z)$

für die x-Komponente: $\ddot{x} = -\frac{\kappa}{m}x$ ⊗

Ansatz: $x(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t$ • A, B, ω zu finden

Einsetzen: $\dot{x}(t) = -A\omega\sin\omega t + B\omega\cos\omega t$ ∘

$\ddot{x}(t) = -A\omega^2\cos\omega t - B\omega^2\sin\omega t$

$\overset{!}{\underset{⊗}{=}} -\frac{\kappa}{m}x(t) = -\frac{\kappa}{m}(A\cos\omega t + B\sin\omega t)$

Vergleich: $\omega^2 = \frac{\kappa}{m}$ $\qquad A, B$ frei

es fehlen noch AW, z.B.: $\vec{r}(0) = \vec{r}_1$, $\dot{\vec{r}}(0) = 0$

also: $x(0) = x_1$, $\dot{x}(0) = 0$

Einsetzen in • und ∘: $A = x_1$, $B\omega = 0$

zusammen: $x(t) = x_1\cos\sqrt{\frac{\kappa}{m}}\,t$

für alle Komponenten: $\vec{r}(t) = \vec{r}_1\cos\sqrt{\frac{\kappa}{m}}\,t$ (3.7)

III.2 Impuls und Drehimpuls

Impuls: $\vec{p} := m\vec{v}$ (3.8)

$\rightarrow$ Newton 2: $\dot{\vec{p}} = \vec{F}$ (3.9)

falls $\vec{F} = 0 \rightsquigarrow \dot{\vec{p}} = 0 \rightsquigarrow \vec{p} = \overrightarrow{\text{const.}}$ Impulserhaltung

2-Teilchen-System, isoliert:

Gesamtimpuls $\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \overrightarrow{\text{const.}}$

Schwerpunktsbewegung:

$\vec{R}_s := \frac{1}{M}\left(m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2\right)$ mit $M = m_1 + m_2$

$\dot{\vec{R}}_s = \frac{1}{M}\left(m_1\dot{\vec{r}}_1 + m_2\dot{\vec{r}}_2\right) = \frac{1}{M}\left(\vec{p}_1 + \vec{p}_2\right) = \vec{P}/M = \vec{V} = \overrightarrow{\text{const.}}$

$\rightsquigarrow \vec{R}_s(t) = \vec{R}_s(0) + \vec{V}\cdot t \underset{\text{alternativ}}{=} \vec{V}\cdot(t - t_0)$

Drehimpuls: $\vec L := m\vec r \times \vec v = \vec r \times \vec p$ (3.10)

abhängig vom Bezugspunkt (hier $\vec r_0 = 0$)

mit Newton 2: $\dot{\vec L} = \cancel{m\dot{\vec r}\times\dot{\vec r}}^{\,0} + m\vec r\times\ddot{\vec r} = \vec r\times\vec F =: \vec N$ (3.11)

Drehmoment

$\vec N = 0$ falls $\vec F = 0$ oder $\vec F \parallel \vec r$, d.h.

$\vec F(\vec r,\dot{\vec r},t) = f(\vec r,\dot{\vec r},t)\cdot\vec e_r$ Zentralkraft

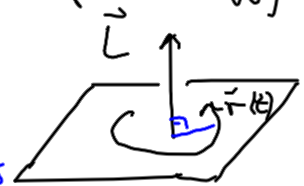
2-Teilchen-System, isoliert:

es gilt: $\vec L = \vec L_1 + \vec L_2 = \overrightarrow{\text{konst}}$ ← Erhaltung des Gesamt-Drehimpulses

(bei gleichem Bezugspunkt)

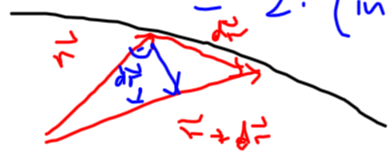
geometrische Interpretation der Drehimpulserhaltung:

- $\vec r\cdot\vec L = \vec r\cdot(m\vec r\times\dot{\vec r}) = 0 \xrightarrow{\vec L = \text{const}}$ Ebenengleichung für $\vec r(t)$



- $\frac{1}{m} L = |\vec r\times\dot{\vec r}| = r\cdot v_\perp = r\left|\frac{d\vec r_\perp}{dt}\right|$

$= 2\cdot$ (in dt überstrichene Fläche △)/dt



2. Keplersche Gesetz

III.3 Energie und Potenzial

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} \quad \Big| \cdot \dot{\vec{r}} \quad \curvearrowright \quad m\dot{\vec{r}}\cdot\ddot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}\cdot\vec{F} \qquad (3.12)$$

$$\partial_t\left(\tfrac{1}{2}m\dot{\vec{r}}\cdot\dot{\vec{r}}\right) = \frac{d\vec{r}}{dt}\cdot\vec{F} \quad \text{Leistung}$$

kinetische Energie $T = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2$ (3.13)

wenn $\exists$ Funktion $V(\vec{r})$ („Potenzial") so daß

$$\vec{F}(\vec{r},\cancel{\dot{\vec{r}}},\cancel{t}) = -\vec{\nabla}V(\vec{r}) \qquad (3.14)$$

dann gilt $\partial_t V(\vec{r}(t)) = \dot{\vec{r}}(t)\cdot\vec{\nabla}V(\vec{r}(t)) = -\dot{\vec{r}}\cdot\vec{F}$

und somit $\partial_t T = -\partial_t V$

kin. + pot. Energie

$\curvearrowright$ Energie-Erhaltung: $\partial_t(T+V) = 0 \iff$

$$T+V = \tfrac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2(t) + V(\vec{r}(t)) = \text{konst.} =: E \qquad (3.15)$$

solche Kraft-Gesetze heißen „konservativ"

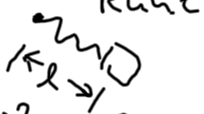
Beispiele:

A) $\vec{F} \doteq (0, 0, -mg) = (-\partial_x V, -\partial_y V, -\partial_z V)$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 0 = \partial_x V \\ 0 = \partial_y V \\ mg = \partial_z V \end{array} \right. \Rightarrow V = V(z)$$

$$\to mg = V'(z) \rightsquigarrow V = mgz + \cancelto{0}{c} \qquad (3.16)$$

B) $\vec{F} = -\kappa (r-\ell)\, \vec{e}_r$



raten: $V(\vec{r}) = \frac{\kappa}{2}(r-\ell)^2$ (3.17) Betrag!

Test: $\vec{\nabla} V(\vec{r}) \doteq \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} V(r) = \otimes$ $\begin{pmatrix} i = 1,2,3 \\ = x,y,z \end{pmatrix}$

nützlich: $\partial_i r = \partial_i \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \frac{\partial_i (x^2+y^2+z^2)}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{2x_i}{2r} = \frac{x_i}{r}$

$\rightsquigarrow \frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{x_i}{r} \Leftrightarrow \vec{\nabla} r = \vec{e}_r$ (3.18)

$\rightsquigarrow \vec{\nabla} f(r) = f'(r)\, \vec{\nabla} r = f'(r)\, \vec{e}_r$

$\otimes = V'(r) \begin{pmatrix} x/r \\ y/r \\ z/r \end{pmatrix} \doteq \kappa (r-\ell)\, \vec{e}_r$ ✓

allgemein:

Zentralkraft: $\vec{F} = f(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)\, \vec{e}_r \longleftrightarrow \dot{\vec{L}} = 0$

konserv. Kraft: $\vec{F} = -\vec{\nabla} V(\vec{r}) \longleftrightarrow \dot{E} = 0$

beides: konservative Zentralkraft:

$\vec{F} = f(r)\, \vec{e}_r$ oder $\vec{F} = -\vec{\nabla} V(r)$, $f = -V'$ (3.19)

C) $\vec{F} = -\gamma \frac{mM}{r^2} \vec{e}_r$ kons. Zentralkraft

$V(r) = -\gamma \frac{mM}{r}$ (3.20)

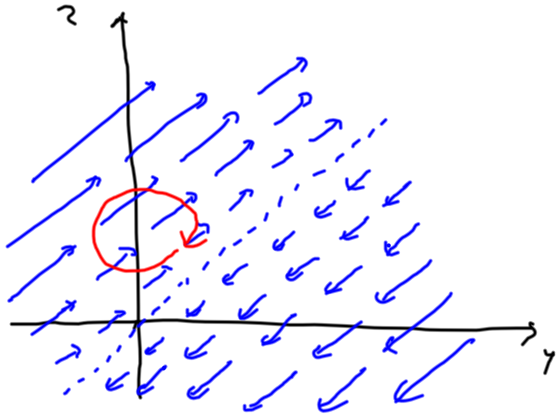
D) $\vec{F} \doteq \kappa(-x, z-y, z-y)$ $\exists V$? zu Fuß:

$$-F_x = \kappa x \overset{!}{=} \partial_x V \rightsquigarrow V = \frac{\kappa}{2} x^2 + f(y,z)$$

$$-F_y = \kappa y - \kappa z \overset{!}{=} \partial_y V = \partial_y f \rightsquigarrow f(y,z) = \frac{\kappa}{2} y^2 - \kappa yz + g(z)$$

$$-F_z = \kappa y - \kappa z \overset{!}{=} \partial_z V = -\kappa y + g'(z) \rightsquigarrow g'(z) = 2\kappa y - \kappa z$$

Widerspruch! $\Rightarrow$ $\nexists V$



allgemein: $\exists$ notwendige Bedingung

$$\partial_i F_j = \partial_j F_i \quad \xRightarrow[F_i = -\partial_i V]{} \quad -\partial_i \partial_j V = -\partial_j \partial_i V \quad \checkmark$$

falls $\neq$ $\quad\Longrightarrow\quad$ auch $\neq$

$$\Longleftrightarrow \quad \partial_i F_j - \partial_j F_i = 0 \qquad \text{für } (ij) = (1,2),\ (1,3),\ (2,3)$$

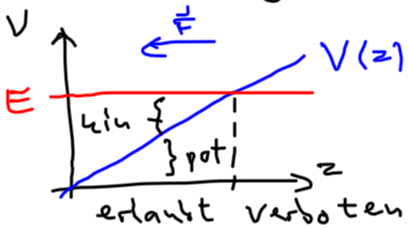
$$\Longleftrightarrow \quad \varepsilon_{ijk}\, \partial_i F_j = 0 \qquad \text{für } k = 1,2,3$$

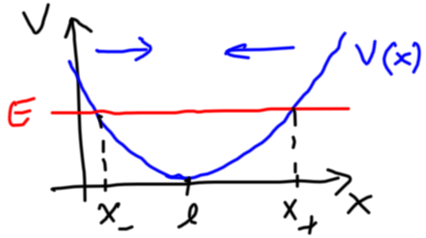
$$\Longleftrightarrow \quad \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Nabla}}}{\vec{\nabla}} \times \vec{F} = 0 \qquad (3.21)$$

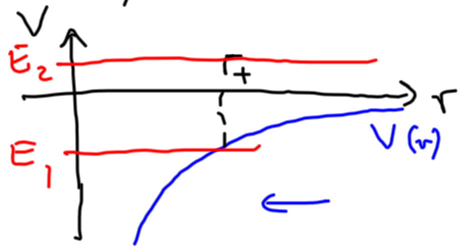
„Rotation" von $\vec{F}$

III.4 Eindimensionale Bewegung mit dem Energiesatz

Bewegungstyp aus Potenzial ablesbar, z.B.







erlaubte Bewegung: $V(x) \le E$, $E - V(x) = T(x) = \frac{1}{2} m v^2 \ge 0$

Umkehrpunkte: $V(x_\pm) = E \Leftrightarrow T(x_\pm) = 0$

Lösung über Energiesatz (statt Newton 2):

$$\frac{1}{2} m \dot{x}^2 = E - V(x) \rightsquigarrow \dot{x} = \pm \sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V(x)\right)}$$

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} \rightsquigarrow dx = \dot{x}\, dt = \pm \sqrt{\cdots}\, dt \rightsquigarrow dt = \pm \frac{dx}{\sqrt{\cdots}} \rightsquigarrow$$

$$\int_{t_0}^{t} dt' = \pm \int_{x_0}^{x} \frac{dx'}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V(x')\right)}} \rightsquigarrow t - t_0 = \pm \int_{x_0}^{x} \frac{dx'}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V(x')\right)}} \qquad (3.22)$$

dies liefert $t = t(x) \xrightarrow{\text{umkehren}} x(t)$ mit $x(t_0) = x_0$

statt $\dot{x}(t_0)$ ist E gegeben

gebundene Bewegung ist periodisch,

mit Periode

$$T(E) = 2 \int_{x_-}^{x_+} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V(x)\right)}} \tag{3.23}$$

mit Umkehrpunkten $x_\pm$

III.5 Dreidimensionale Bewegung unter konservativer Zentralkra

Teilchen unter Einfluß $\vec{F}(r) = -\vec{\nabla} V(r)$

erhalten sind $L = m \cdot v_\perp r$ & $E = \frac{1}{2} m v^2 + V(r)$

$\vec{L} = \text{konst.} \rightsquigarrow$ Bewegung in Ebene $\left(z=0 \Leftrightarrow \vartheta = \frac{\pi}{2} \right)$

$\vec{v} = \vec{v}_\parallel + \vec{v}_\perp$ (bezgl. $\vec{r}$) $\rightsquigarrow$ $v^2 = v_\parallel^2 + v_\perp^2$ mit $v_\parallel = \vec{v} \cdot \vec{e}_r = \dot{r}$

eliminiere $v_\perp = L/mr$. Jetzt Energieerhaltung:

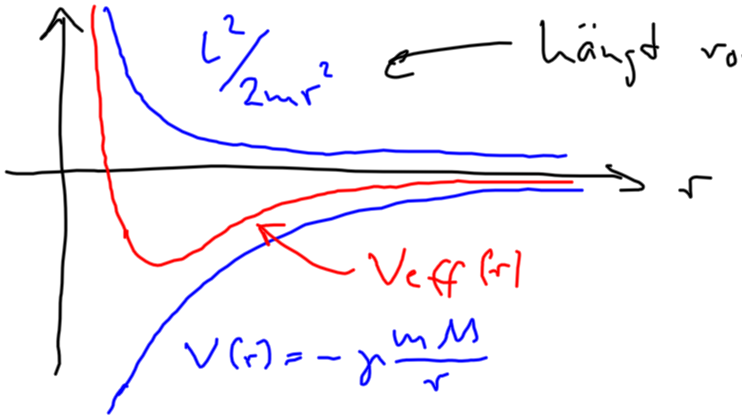
$$E = \frac{1}{2} m \left(\dot{r}^2 + \frac{L^2}{m^2 r^2} \right) + V(r) = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \underbrace{\frac{L^2}{2mr^2} + V(r)}$$

$$= \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \underbrace{V_{\text{eff}}(r)} \qquad (3.24)$$

„effektives Potenzial"

$L^2/2mr^2$ heißt Zentrifugalbarriere

Beispiel Gravitationspotenzial:



eindimensionales Ersatzproblem mit $V_{eff}(r)$ (3.25)

$$\dot{r}(t) = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V_{eff}(r)\right)}\,, \qquad r\dot{\varphi}(t) = v_\perp = \frac{L}{m\,r(t)}\,, \qquad \vartheta = \frac{\pi}{2}$$

$$t - t_0 = \pm\int_{r_0}^{r} \frac{dr'}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V_{eff}(r')\right)}} \xrightarrow{r(t)} \varphi - \varphi_0 = \frac{L}{m}\int_{t_0}^{t}\frac{dt'}{r^2(t')} \rightsquigarrow \varphi(t)$$ (3.26)

$\longrightarrow$ Parameterdarstellung der Bahn: $r(t)$, $\varphi(t)$, $\vartheta(t) = \frac{\pi}{2}$

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{d\varphi}{dt}\,\frac{dt}{dr} = \frac{L}{mr^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V_{eff}(r)\right)}}$$

Polardarstellung der Bahnkurve

$$\varphi - \varphi_0 = \frac{L}{\sqrt{2m}}\int_{r_0}^{r}\frac{dr'}{r'^2\sqrt{E - V_{eff}(r')}} \rightsquigarrow \varphi(r) \rightsquigarrow r(\varphi)$$ (3.27)

Schwingungsperiode bei gebundener Bewegung

$$T = 2\int_{r_-}^{r_+} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V_{eff}(r)\right)}} \qquad (3.28)$$

zugehöriger Winkel ist

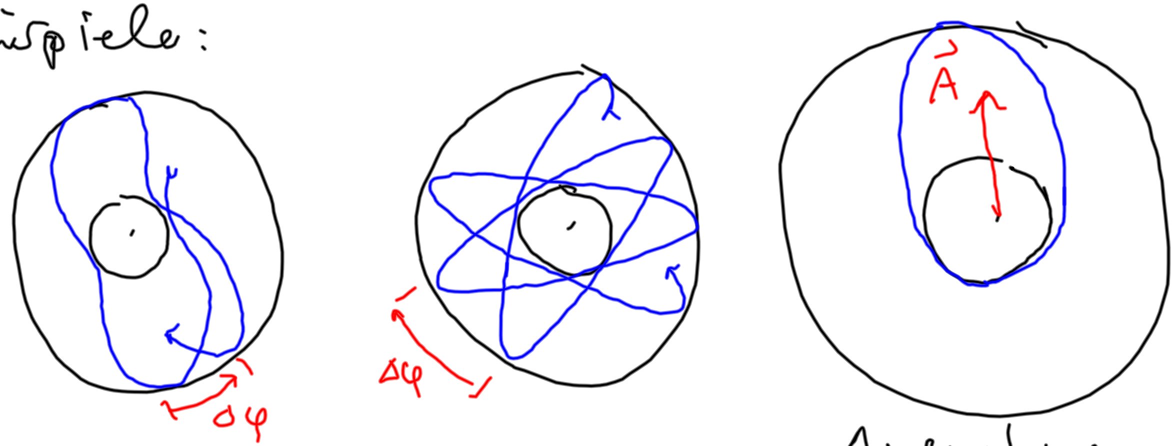
$$\Delta\varphi = \frac{2L}{\sqrt{2m}} \int_{r_-}^{r_+} \frac{dr}{r^2\sqrt{E - V_{eff}(r)}}$$

Bahn geschlossen falls

$$k \cdot \Delta\varphi = n \cdot 2\pi$$

$k, n \in \mathbb{Z}$

Beispiele:



Ausnahme

III.6 Keplerproblem

$$V(r) = -\frac{\alpha}{r} \qquad (3.29)$$

$\alpha > 0$ attraktiv

$\alpha < 0$ repulsiv

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} V(r) = -\frac{\alpha}{r^2}\vec{e}_r = -\frac{\alpha}{r^3}\vec{r}$$

Erhaltungssätze:

- Energie $\quad E = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^{\,2} - \frac{\alpha}{r} \qquad (1)$
- Drehimpuls $\quad \vec{L} = m \vec{r} \times \dot{\vec{r}} \qquad (3)$
- Runge-Lenz-Vektor $\quad \vec{A} = \dot{\vec{r}} \times \vec{L} - \alpha \vec{e}_r \qquad (3)$ aber nur (1) unabh.

(3.30)

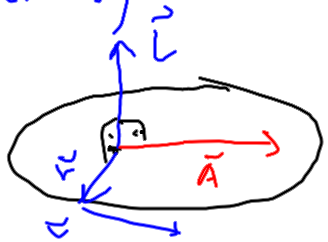
Beweis für $\vec{A}$:

$$\dot{\vec{A}} = \ddot{\vec{r}} \times \vec{L} + \dot{\vec{r}} \times \underbrace{\cancel{\dot{\vec{L}}}}_{0} - \frac{\alpha}{r}\dot{\vec{r}} + \frac{\alpha}{r^2}\dot{r}\vec{r}$$

$$\ddot{\vec{r}} \times \vec{L} = -\frac{\alpha}{m}\frac{1}{r^3}\vec{r} \times (m \vec{r} \times \dot{\vec{r}}) = -\frac{\alpha}{r^3}\left(\vec{r}\,\overbrace{(\vec{r}\cdot\dot{\vec{r}})}^{r\dot{r}} - \dot{\vec{r}}\,\overbrace{(\vec{r}\cdot\vec{r})}^{r^2}\right)$$

$$= -\frac{\alpha}{r^2}\dot{r}\vec{r} + \frac{\alpha}{r}\dot{\vec{r}}$$

$\Rightarrow \dot{\vec{A}} = 0$ ✓



Ausnutzen:

$$\vec{A}^2 = \vec{A}\cdot\vec{A} = \left(\dot{\vec{r}}\times\vec{L} - \frac{\alpha}{r}\vec{r}\right)^2$$

$$= \left(\dot{\vec{r}}\times\vec{L}\right)^2 - \frac{2\alpha}{r}\left(\dot{\vec{r}}\times\vec{L}\right)\cdot\vec{r} + \frac{\alpha^2}{\cancel{r^2}}\cancel{\vec{r}^2}$$

$$= \dot{\vec{r}}^2\vec{L}^2 - \underbrace{\left(\dot{\vec{r}}\cdot\vec{L}\right)^2}_{\to 0} - \frac{2\alpha}{r}\left(\vec{r}\times\dot{\vec{r}}\right)\cdot\vec{L} + \alpha^2$$

$$= \dot{\vec{r}}^2\vec{L}^2 - \frac{2\alpha}{r}\frac{1}{m}\vec{L}\cdot\vec{L} + \alpha^2$$

$$= \vec{L}^2\left(\dot{\vec{r}}^2 - \frac{2\alpha}{mr}\right) + \alpha^2 = \frac{2\vec{L}^2}{m}E + \alpha^2$$

$$\rightsquigarrow \quad A = \alpha\sqrt{1+\frac{2L^2E}{m\alpha^2}} =: \alpha\cdot\varepsilon \quad \leftarrow$$ numerische Exzentrizität (3.31)

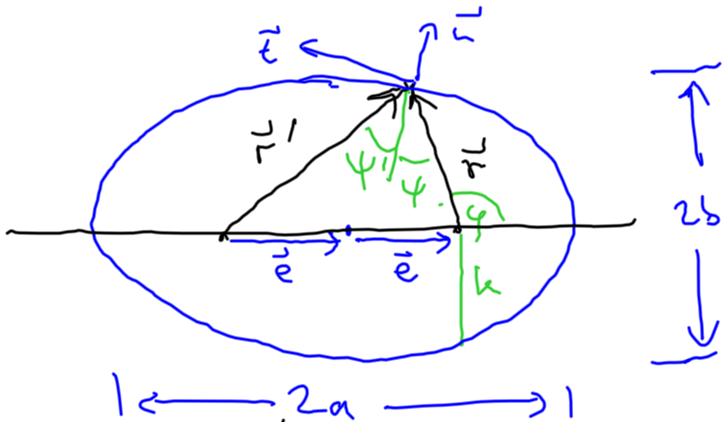
$$\vec{A}\cdot\vec{L} = 0$$

$$\vec{A}\cdot\vec{r} = \left(\dot{\vec{r}}\times\vec{L}\right)\cdot\vec{r} - \frac{\alpha}{r}\vec{r}\cdot\vec{r} = \frac{L^2}{m} - \alpha r$$

aber auch $\vec{A}\cdot\vec{r} = A\,r\cos\varphi \overset{(3.31)}{=} \alpha\,\varepsilon\,r\cos\varphi$ $\Big\}\ r(\varphi)$!

$$r(\varphi) = \frac{k}{1+\varepsilon\cos\varphi} \quad \text{mit} \quad k = L^2/m\alpha \qquad (3.32)$$

welche Kurve? Ellipse!



$r + r' = $ konst.

Ä-Linie von

$V(x,y) = r + r'$

$$\rightsquigarrow 0 = \vec\nabla V \cdot \vec t$$
$$= (\vec\nabla r + \vec\nabla r') \cdot \vec t$$
$$= (\vec e_r + \vec e_{r'}) \cdot \vec t$$
$$= -\cos\left(\tfrac{\pi}{2} - \psi\right) + \cos\left(\tfrac{\pi}{2} - \psi'\right)$$
$$= -\sin\psi + \sin\psi'$$

$$r + r' = 2a$$
$$r' = 2a - r$$
$$r'^2 = 4a^2 - 4ar + r^2$$

aber auch

$$\vec r\,' = 2\vec e + \vec r$$
$$\vec r\,'^2 = 4\vec e^{\,2} + 4\vec e \cdot \vec r + \vec r^{\,2}$$
$$r'^2 = 4e^2 + 4er\cos\varphi + r^2$$

$$a^2 - ar = e^2 + er\cos\varphi$$
$$r(a + e\cos\varphi) = a^2 - e^2$$
$$r(1 + \varepsilon\cos\varphi) = \frac{a^2 - e^2}{a} = \frac{b^2}{a} =: k \longleftarrow \text{„Parameter"}$$
$$r = \frac{k}{1 + \varepsilon\cos\varphi}$$

Polardarstellung einer Ellipse ($\varepsilon < 1$)

Def:

$\varepsilon := \frac{e}{a} < 1$

$\varepsilon = 0$ Kreis

$\varepsilon = 1$ Parabel

$\varepsilon > 1$ Hyperbel

Zwei-Teilchen-System

$\vec{r}_1, \vec{r}_2 \longrightarrow \vec{R} = \dfrac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{M}$, $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 = \vec{r}_{12}$ (3.33)

$M = m_1 + m_2$

angenommen: $\vec{F}_{12} = F(r_{12})\,\dfrac{\vec{r}_{12}}{r_{12}} = F(r)\,\vec{e}_r = \vec{F}(r)$ (3.34)

$= -\vec{F}_{21}$

Bewegungsgleichungen

- Schwerpunktsbewegung ✓
- Relativbewegung:

$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}_1 - \ddot{\vec{r}}_2 = \dfrac{1}{m_1}\vec{F}_{12} - \dfrac{1}{m_2}\vec{F}_{21} = \left(\dfrac{1}{m_1} + \dfrac{1}{m_2}\right)\vec{F}(r)$

$\rightarrow m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}(r)$ mit $\dfrac{1}{m} := \dfrac{1}{m_1} + \dfrac{1}{m_2}$ (3.35)

$m = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ reduzierte Masse

Rekonstruktion:

$\vec{r}_1 = \vec{R} + \dfrac{m_2}{M}\vec{r}$, $\vec{r}_2 = \vec{R} - \dfrac{m_1}{M}\vec{r}$ (3.36)

Bsp. Planetenbewegung